MATEMATICAMENTE

Workshops Teoria dos Números, Combinatória e Álgebra para OBM

Lista Adicional – O Básico do Básico: Indução

Problemas

1. Demonstre que $n^3 - n$ é múltiplo de 6 para todo natural n.

2. Prove que $n^7 - n$ é múltiplo de 7 para todo natural n.

3. Prove que todo inteiro positivo possui uma única representação da forma $2^a b$, na qual a é inteiro não negativo e b é inteiro positivo ímpar.

4. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(d) $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$

(e) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ (se x é diferente de 1)

(f) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

(g) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

5. Calcule as somas

(a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2$

(b) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(c) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

6. Determine, com justificativa, o maior número natural n para o qual $n^3 > 2^n$.

7. Se x é um número real tal que $x + \dfrac{1}{x}$ é inteiro, prove que $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ também é inteiro, para todo n natural.

8. Prove que se n é um número natural maior ou igual a 4, então $n! > 2^n$.

9. Prove que para todo natural n o número $4^n + 15n - 1$ é divisível por 9.

10. Se m e n são números naturais, definimos $\binom{n}{m}$ como o número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com exatamente m elementos.

(a) Prove que, para todos os naturais m e n, $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$.

(b) (IME) Demonstre, por indução, o binômio de Newton, ou seja, $(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots y^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

11. Para todo natural maior que 1, prove que $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

12. Determine todos os números naturais n tais que $1! + 2! + 3! + \cdots + n! = n^2$.

13. Calcule $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$, ou seja, $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! \cdots + n \cdot n!$.

14. João e Maria jogam um jogo que começa com duas pilhas de balas sobre a mesa. Na sua vez de jogar, cada criança come todas as balas de uma das pilhas e divide a outra em duas pilhas com pelo menos uma bala cada uma. A criança que não puder fazer uma jogada válida perde o jogo. Quem tem uma estratégia vencedora? Qual é essa estratégia?

15. Prove que, se o produto de $n \geq 2$ números reais positivos é igual a 1, então sua soma é maior ou igual a n, e determine em que casos ocorre a igualdade.

16. Prove que a média aritmética de um conjunto finito de números positivos é sempre maior ou igual a sua média geométrica, e determine em que casos ocorre a igualdade.

17. Prove que, para todo inteiro positivo n e todo real x, $|\operatorname{sen} nx| \leq n|\operatorname{sen} x|$.

18. Calcule a soma a seguir, em função de m e n.

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n+1}{k}$$

19. Um país tem n cidades. Quaisquer duas cidades estão conectadas por uma estrada de mão única. Prove que existe uma rota que passa por todas as cidades.

20. De um tabuleiro quadriculado 64×64 retira-se uma casa qualquer. Prove que o tabuleiro restante pode ser completamente coberto com triminós em forma de “L”(sem superposição).

21. Uma certa organização tem n membros, e $n+1$ comitês distintos de três membros. Prove que há dois comitês com exatamente um membro em comum.